مرکز سنجش آموزش مدارس برتر

دوازدهم
ریاضی

آزمون شماره ۴
۲۰ مهر ۱۴۰۳

پاسخنامه ریاضی ـ فیزیک

ردیف	نام درس	سرگروه	گروه طراحی و بازنگری (به ترتیب حروف الفبا)	ویراستاران
۱	حسابان		حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان	ابوالفضل فروغی ـ نیکا موسوی
۲	هندسه	مهریار راشدی	حسن محمدبیگی ـ محمد شاه‌محمدی احمدرضا فلاح	مهدیار شریف ـ فاطمه فرجی
۳	گسسته	رضا توکلی	رضا توکلی ـ سوگند روشنی	مهدیار شریف ـ فاطمه فرجی
۴	فیزیک	جواد قزوینیان	مجتبی دانایی ـ علی مجیدی	محمدرضا خادمی ـ مهدیار شریف
۵	شیمی	مسعود جعفری	محبوبه بیک‌محمدی ـ هادی مهدی‌زاده	محمد داودآبادی ـ کارو محمدی

گروه تایپ و ویراستاری (به ترتیب حروف الفبا)
زهرا احدی ـ امیرعلی الماسی ـ مبینا بهرامی ـ معین‌الدین تقی‌زاده ـ پریا رحیمی ـ مهرداد شمسی ـ راضیه صالحی ـ انسیه مرزبان

برای اطلاع از اخبار مرکز سنجش آموزش مدارس برتر، به کانال تلگرام @taraaznet مراجعه نمایید.

حسابان

۱. گزینه ۲ صحیح است.

دو طرف تساوی را بر $\cos^۲ x$ تقسیم می‌کنیم:

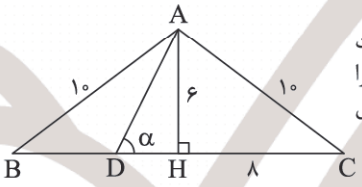
$$۳+\frac{a\sin^۲ x}{\cos^۲ x}=\frac{a-۱}{\cos^۲ x}$$
$$\Rightarrow ۳+a\tan^۲ x=(a-۱)(۱+\tan^۲ x)$$
$$\Rightarrow ۳+a(۲a-۱۰)=(a-۱)(۱+۲a-۱۰)$$
$$\Rightarrow ۲a^۲-۱۰a+۳=۲a^۲-۱۱a+۹\Rightarrow a=۶$$

۲. گزینه ۴ صحیح است.

$$\tan\alpha-\cot\alpha=-۲\cot ۲\alpha=\frac{۳}{۲}$$
$$\Rightarrow \cot ۲\alpha=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow|\cos ۲\alpha|=\frac{۳}{۵}$$
$$\cos ۴\alpha=۲\cos^۲ ۲\alpha-۱=۲\times\frac{۹}{۲۵}-۱=-\frac{۷}{۲۵}=-۰/۲۸$$

۳. گزینه ۱ صحیح است.

ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین ABC را رسم می‌کنیم، پس $CH=۸$ و $AH=۶$ است.



$$\tan\alpha=\frac{AH}{DH}=\frac{۶}{DH}=۲$$
$$\Rightarrow DH=۳\Rightarrow BD=۵\Rightarrow\frac{BD}{DC}=\frac{۵}{۱۱}$$

۴. گزینه ۳ صحیح است.

$$A=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\Rightarrow A^۲=\frac{۱-\sin ۲\alpha}{\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲\alpha}=\frac{۱-\frac{۴}{۵}}{\frac{۱}{۴}\times\frac{۱۶}{۲۵}}$$
$$\Rightarrow A^۲=\frac{۵}{۴}\xrightarrow{\sin\alpha>\cos\alpha}A=-\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

α حاده است، پس ۲α تقریباً برابر $۱۸۰^\circ-۵۳^\circ=۱۲۷^\circ$ است، پس $\alpha\simeq ۶۳/۵^\circ$ و در نتیجه $\sin\alpha>\cos\alpha$ است.

۵. گزینه ۱ صحیح است.

$$\tan(x-\frac{۳\pi}{۲})=-\cot x=۳\Rightarrow\cot x=-۳$$

عبارت خواسته شده را ساده می‌کنیم:

$$P=\frac{۲\sin x-\cos x}{۳\cos x-\sin x}=\frac{۲-\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{۳\cos x}{\sin x}-۱}$$
$$\Rightarrow\frac{۲-\cot x}{۳\cot x-۱}=\frac{۲+۳}{-۹-۱}=-\frac{۱}{۲}$$

۶. گزینه ۳ صحیح است.

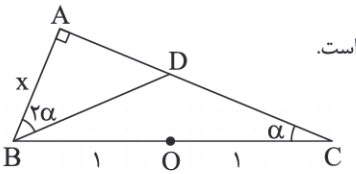
$$\begin{cases}\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)=۵a-۴\\ \sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)=۱-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin\theta=۴-۵a\\ \cos\theta=۱-a\end{cases}$$
$$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱\Rightarrow(۴-۵a)^۲+(۱-a)^۲=۱$$
$$\Rightarrow ۲۶a^۲-۴۲a+۱۶=۰\Rightarrow ۱۳a^۲-۲۱a+۸=۰$$
$$\Rightarrow(۱۳a-۸)(a-۱)=۰$$
$$\Rightarrow a=\frac{۸}{۱۳}\Rightarrow\begin{cases}\sin\theta=\frac{۱۲}{۱۳}\\ \cos\theta=\frac{۵}{۱۳}\end{cases}$$
$$\sin ۲\theta=۲\sin\theta\cos\theta=\frac{۱۲۰}{۱۶۹}\Rightarrow ۱۶۹\sin ۲\theta=۱۲۰$$

۷. گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{۲(\cos ۸۰^\circ+\frac{۱}{۲})}{\cos ۱۰^\circ\cos ۷۰^\circ}=\frac{۲(\cos(۷۰^\circ+۱۰^\circ)+\cos(۷۰^\circ-۱۰^\circ))}{\cos ۱۰^\circ\cos ۷۰^\circ}$$
$$=\frac{۲(\cos ۷۰^\circ\cos ۱۰^\circ-\sin ۷۰^\circ\sin ۱۰^\circ+\cos ۷۰^\circ\cos ۱۰^\circ+\sin ۷۰^\circ\sin ۱۰^\circ)}{\cos ۱۰^\circ\cos ۷۰^\circ}$$
$$=\frac{۴\cancel{\cos ۷۰^\circ}\cos ۱۰^\circ}{\cancel{\cos ۱۰^\circ}\cancel{\cos ۷۰^\circ}}=۴$$

۸. گزینه ۲ صحیح است.

مثلث ABC، قائم‌الزاویه است.



$$\sin ۲\alpha=\frac{۳}{۵}=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$$
$$\Rightarrow ۳\tan^۲\alpha-۱۰\tan\alpha+۳=۰$$
$$\Rightarrow\tan\alpha=۳\text{ یا }\frac{۱}{۳}$$

چون ۲α حاده است پس $\tan\alpha=\frac{۱}{۳}$ قابل قبول است.

$$\tan\alpha=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{x}{\sqrt{۴-x^۲}}\Rightarrow ۹x^۲=۴-x^۲$$
$$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}\Rightarrow AC=\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۵}$$
$$\tan ۲\alpha=\frac{۳}{۴}=\frac{AD}{x}\Rightarrow AD=\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۲۰}\Rightarrow DC=\frac{۹\sqrt{۱۰}}{۲۰}$$
$$\Rightarrow\frac{CD}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۹}{۲۰}$$

۹. گزینه ۲ صحیح است.

ریشه‌های معادله به صورت $\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۲}{۵}$ است. اگر فرض کنیم $\sin\alpha\cos\beta=\frac{۲}{۵}$ و $\cos\alpha\sin\beta=\frac{۱}{۵}$ داریم:

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$
$$=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)$$
$$=\sin^۲\alpha\cos^۲\beta-\cos^۲\alpha\sin^۲\beta=\frac{۴}{۲۵}-\frac{۱}{۲۵}=۰/۱۲$$

حالت دیگر آن است که $\sin\alpha\cos\beta=\frac{۱}{۵}$ و $\cos\alpha\sin\beta=\frac{۲}{۵}$ و به جواب ۰/۱۲− برسیم.

جمع ریشه‌ها $=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)=\frac{۱۵}{۲۵}=\frac{۳}{۵}$

قدرمطلق تفریق ریشه‌ها $=|\sin(\alpha-\beta)|=\frac{\sqrt{۵}}{|a|}=\frac{۵}{۲۵}=\frac{۱}{۵}$

۱۰. گزینه ۴ صحیح است.

$$S=\frac{۱}{۲}R_۱^۲\alpha-\frac{۱}{۲}R_۲^۲\alpha$$
$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\alpha(R_۱^۲-R_۲^۲)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۵\pi}{۶}(۳۶-۱۶)=\frac{۲۵\pi}{۳}$$
$$P=R_۱\alpha+R_۲\alpha+۲(R_۱-R_۲)$$
$$\Rightarrow P=۶\times\frac{۵\pi}{۶}+۴\times\frac{۵\pi}{۶}+۲\times۲=\frac{۲۵\pi}{۳}+۴$$
$$\Rightarrow P-S=\frac{۲۵\pi}{۳}+۴-\frac{۲۵\pi}{۳}=۴$$

۱۱. گزینه ۳ صحیح است.

$$f(x)=(\sin^۲ ax-\cos^۲ ax)(\sin^۲ ax+\cos^۲ ax)=-\cos(۲ax)$$
$$T=۳\pi=\frac{۲\pi}{|۲a|}\Rightarrow|a|=\frac{۱}{۳}$$

دورهٔ تناوب تابع $f(\frac{a}{۳}x)$ برابر $\frac{۳}{|a|}T$ است. پس:

$$\frac{۳}{|a|}T = ۹\times ۳\pi = ۲۷\pi$$

۱۲. گزینه ۴ صحیح است.

$$y = \frac{a}{۲}\sin(۲bx)$$

$$|\frac{a}{۲}| = ۲ \Rightarrow |a| = ۴$$

$$T_۱ = \frac{۴\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{|۲b|} \Rightarrow |b| = \frac{۳}{۴} \Rightarrow |ab| = ۳$$

$$T_۲ = \frac{۲\pi}{|\frac{۱}{ab}|} = ۲|ab|\pi = ۶\pi$$

۱۳. گزینه ۳ صحیح است.

تمام گزینه‌ها به فرم $c + a\sin bx$ می‌باشند.

$$\begin{cases}\max\{f(x)\} = T + ۲\\ \max\{f(x)\} = \min\{f(x)\} + ۴\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c + |a| = \frac{۲\pi}{|b|} + ۲\\ c + |a| = c - |a| + ۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow |a| = ۲ \Rightarrow c = \frac{۲\pi}{|b|}$$

فقط گزینهٔ ۳ این شرایط را دارد.

۱۴. گزینه ۱ صحیح است.

$$f(۰) = ۰ \Rightarrow a - ۴\sin\frac{\pi}{۶} = ۰ \Rightarrow a = ۲$$

در مبدأ تابع صعودی است پس $b < ۰$ است.

$$\max\{f(x)\} = ۶ \Rightarrow ۲ - ۴\sin(bx + \frac{\pi}{۶}) = ۶$$

$$\Rightarrow \sin(bx + \frac{\pi}{۶}) = -۱ \Rightarrow \sin(-bx - \frac{\pi}{۶}) = ۱$$

$$\Rightarrow -b(\frac{۴\pi}{۳}) - \frac{\pi}{۶} = \frac{۵\pi}{۲} \Rightarrow b = -۲$$

$$\Rightarrow f(x) = ۲ - ۴\sin(-۲x + \frac{\pi}{۶})$$

$$\Rightarrow f(x) = ۲ + ۴\sin(۲x - \frac{\pi}{۶})$$

$$f(\alpha) = ۰ \Rightarrow ۲\alpha - \frac{\pi}{۶} = \frac{۷\pi}{۶} \Rightarrow \alpha = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \sin(\alpha + \frac{\pi}{۶}) = \frac{۱}{۲}$$

۱۵. گزینه ۱ صحیح است.

حداکثر a به ازای اعداد مثبت a به دست می‌آید.

$$۰ < x < ۳ \Rightarrow \frac{\pi}{۳} < a\pi x + \frac{\pi}{۳} < ۳a\pi + \frac{\pi}{۳}$$

حداکثر $۳a\pi + \frac{\pi}{۳}$ برابر $\frac{\pi}{۲}$ است، پس:

$$۳a\pi + \frac{\pi}{۳} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow a = \frac{۱}{۱۸}$$

۱۶. گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{۲x_B - \pi}{۴} = -\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x_B = -\frac{\pi}{۲}$$

$$f(۰) = y_A \Rightarrow y_A = ۲$$

$$f(x_C) = ۰ \Rightarrow ۱ - \tan(\frac{۲x_C - \pi}{۴}) = ۰$$

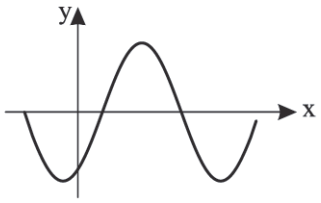
$$\Rightarrow \frac{۲x_C - \pi}{۴} = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x_C = \pi$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}\times y_A \times (x_C - x_B) = \frac{۱}{۲}\times ۲\times \frac{۳\pi}{۲} = \frac{۳\pi}{۲}$$

۱۷. گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{cases}y_{max} = ۴ = c + |a|\\ y_{min} = -۲ = c - |a|\end{cases} \Rightarrow c = ۱$$

چون $y(۰) = c + \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ باید منفی باشد، پس $a < ۰$ است. نمودار $a\cos(x + \frac{\pi}{۶})$ به صورت زیر است. پس با توجه به نمودار تابع اصلی، b منفی است. پس ab مثبت و bc منفی است.



۱۸. گزینه ۴ صحیح است.

وسط $\frac{۷\pi}{۶}$ و $\frac{۱۱\pi}{۶}$، یعنی $\frac{۳\pi}{۲}$، نقطهٔ ماکزیمم تابع است.

$$f(x) = c + \frac{a}{۲}(۱ - \cos(۲bx + \frac{\pi}{۲})) = c + \frac{a}{۲} + \frac{a}{۲}\sin(۲bx)$$

فرض کنید $a > ۰$ و $b < ۰$ باشد.

$$\begin{cases}c + \frac{a}{۲} - |\frac{a}{۲}| = -۳ \Rightarrow c = -۳\\ ۲b(\frac{۳\pi}{۲}) = -\frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow b = -\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$f(x) = -۳ + \frac{a}{۲} - \frac{a}{۲}\sin x \Rightarrow f(\frac{۷\pi}{۶}) = -۳ + \frac{a}{۲} + \frac{a}{۴} = ۰$$

$$\Rightarrow a = ۴ \Rightarrow \frac{ab}{c} = \frac{۲}{۳}$$

هندسه

۱۹. گزینه ۴ صحیح است.

الف) نادرست، زیرا اگر نقاط A و B و C روی یک خط باشند، از آنها بی‌شمار صفحه می‌گذرد.

ب) نادرست، زیرا از دو خط متنافر صفحه‌ای عبور نمی‌کند.

ج) نادرست، زیرا اگر نقطهٔ A روی خط d باشد، از آنها بی‌شمار صفحه می‌گذرد.

در بین گزاره‌ها فقط (د) همواره درست است.

(هندسه دهم، صفحهٔ ۸۰)

۲۰. گزینه ۳ صحیح است.

می‌دانیم اگر خط گذرنده از نقاط A و B بر صفحهٔ P عمود باشد، از این دو نقطه بی‌شمار صفحه عمود بر P می‌گذرد و اگر خط گذرنده از A و B بر P عمود نباشد، از این دو نقطه فقط یک صفحه عمود بر P عبور می‌کند، پس از دو نقطهٔ A و B یا یک یا بی‌شمار صفحه عمود بر P می‌گذرد.

(هندسه دهم، صفحهٔ ۸۳)

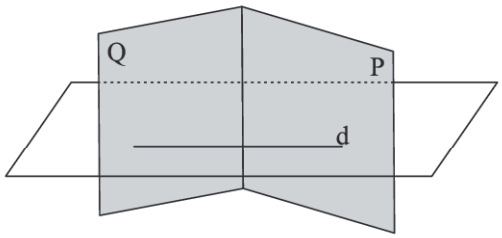
۲۱. گزینه ۳ صحیح است.

می‌دانیم برای آنکه صفحه‌ای بر صفحهٔ دیگر عمود باشد، کافی است بر یک خط از آن صفحه عمود باشد. پس برای آنکه صفحه‌ای، عمود بر P و Q رسم کنیم، کافی است صفحه‌ای بر فصل مشترک صفحه‌های P و Q عمود کنیم و طبق خواستهٔ سؤال، می‌خواهیم این صفحه از خط d بگذرد.

برای آنکه چنین صفحه‌ای قابل رسم باشد، لازم است خط d، بر فصل مشترک P و Q عمود باشد (توجه کنید که وقتی صفحه‌ای بر خطی عمود است، همهٔ خطوط این صفحه بر آن خط عمود هستند.) و در این حالت یک و تنها یک صفحه از d می‌گذرد که بر فصل مشترک P و Q عمود باشد.

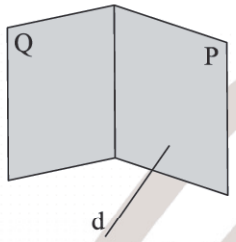
یادآوری: برای رسم این صفحهٔ عمود بر فصل مشترک P و Q، از نقطه‌ای روی خط d، عمود متقاطعی با فصل مشترک P و Q رسم می‌کنیم. حالا صفحه‌ای از این خط و خط d می‌گذرانیم که همان صفحهٔ مطلوب است. اما اگر خط d بر فصل مشترک P و Q عمود نباشد، رسم چنین صفحه‌ای ناممکن است!

حالت ۱:



d بر فصل مشترک P و Q عمود است و یک صفحه از d می‌گذرد که بر P و Q عمود باشد.

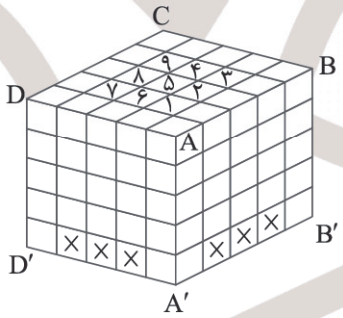
حالت ۲:



d بر فصل مشترک P و Q عمود نیست و نمی‌توان صفحه‌ای از d عبور داد که بر P و Q عمود باشد.

(هندسه دهم، صفحه‌های ۷۸ تا ۸۶)

۲۲. گزینه ۳ صحیح است.



۱) مکعب‌های کوچک دارای یک وجه رنگ شده روی وجه‌های این شکل هستند. روی وجه ABCD مکعب‌های ۱ تا ۹ یعنی نه مکعب دارای یک وجه رنگ شده وجود دارد. روی وجه‌های جانبی چهارگانه علاوه بر ۹ مکعب، ۴×۳ مکعب روی یال‌های $A'B'$ و $B'C'$ و $C'D'$ و $A'D'$ با یک وجه رنگی وجود دارد. پس:

$$a = ۹ + ۴\times۹ + ۴\times۳ = ۵۷$$

۲) روی یال‌های AB و BC و CD و AD هر کدام سه مکعب با دو وجه رنگی وجود دارد و روی یال‌های AA' و BB' و CC' و DD' هر کدام چهار مکعب با دو وجه رنگی وجود دارد. در نتیجه:

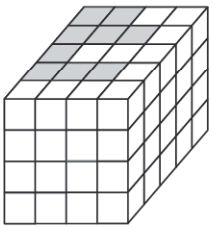
$$b = ۴\times۳ + ۴\times۴ = ۲۸$$

۳) مکعب‌های دارای سه وجه رنگی در رأس‌های بالای این مکعب یعنی A و B و C و D قرار دارند. توجه کنید! کف مکعب بزرگ رنگ شده نیست. پس $c = ۴$ است. بنابراین:

$$a + b + c = ۵۷ + ۲۸ + ۴ = ۸۹$$

(هندسه دهم، صفحهٔ ۹۰)

۲۳. گزینه ۲ صحیح است.



شکل A از $۸۰ = ۴\times۵\times۴$ مکعب کوچک تشکیل شده است. اگر ۹ مکعب رنگی را تا پایین یعنی ۴ ردیف حذف کنیم، ($۹\times۴ = ۳۶$ مکعب)، کمترین تعداد مکعب حذف شده برای رسیدن به نمای B است.

از طرف دیگر حداکثر تعداد مکعب‌های کوچک برای حذف برابر است با کل مکعب‌های موجود در شکل A منهای تعداد مکعب‌های باقیمانده از ردیف بالا یعنی تعداد مکعب‌های شکل B که ۱۱تاست.

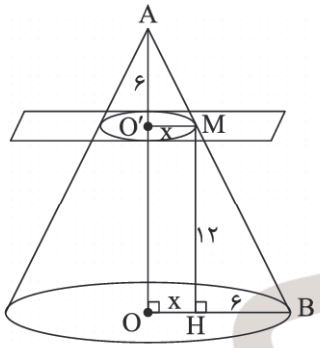
بنابراین:

$$\text{حداکثر مکعب‌های حذف شده} = ۸۰ - ۱۱ = ۶۹$$

پس $a = ۶۹$ و $b = ۳۶$ است. در نتیجه: $a - b = ۶۹ - ۳۶ = ۳۳$.

(هندسه دهم، صفحهٔ ۹۱)

۲۴. گزینه ۱ صحیح است.



سطح مقطع صفحهٔ مورد نظر با مخروط، یک دایره است. به کمک تالس شعاع این دایره را محاسبه می‌کنیم.

$$MH = ۱۲ \Rightarrow OO' = ۱۲$$

$$O'M \parallel OB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{O'M}{OB} = \frac{O'A}{OA}$$

$$\xrightarrow{O'M=x \Rightarrow OH=x} \frac{x}{x+۶} = \frac{۶}{۶+۱۲} \Rightarrow ۳x = x + ۶$$

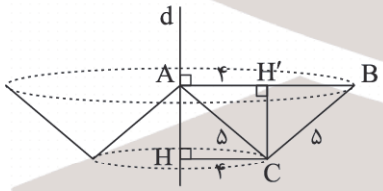
$$\Rightarrow ۲x = ۶ \Rightarrow x = ۳$$

حجم مخروط کوچک − حجم مخروط اولیه = حجم مخروط ناقص باقیمانده

$$= \frac{۱}{۳}\pi(۹)^۲\times۱۸ - \frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲\times۶ = ۴۸۶\pi - ۱۸\pi = ۴۶۸\pi$$

(هندسه دهم، صفحهٔ ۹۲)

۲۵. گزینه ۱ صحیح است.



از نقطهٔ C عمود CH را بر خط d وارد می‌کنیم تا ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCH ایجاد شود. از دوران این ذوزنقه حول خط d یک مخروط ناقص به وجود می‌آید و از دوران مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{ACH}$ یک مخروط ایجاد می‌شود. پس حجم حاصل برابر تفاضل حجم مخروط ناقص از حجم این مخروط است.

در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\Delta}{ABC}$ ارتفاع CH' را رسم می‌کنیم.

در این صورت $AH' = ۴$ و $CH' = \sqrt{۵^۲ - ۴^۲} = ۳$ است و داریم:

$$\text{حجم مخروط ناقص} = \frac{۱}{۳}\pi h(r^۲ + r'^۲ + rr')$$

$$= \frac{۱}{۳}\pi(۳)(۸^۲ + ۴^۲ + (۸\times۴)) = ۱۱۲\pi$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳}\pi h\, r'^۲ = \frac{۱}{۳}\pi(۳)(۴)^۲ = ۱۶\pi$$

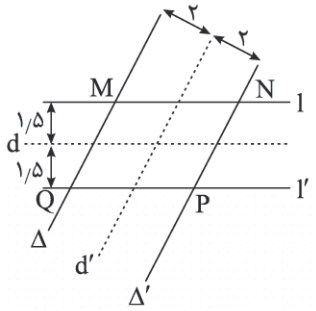
$$\text{حجم خواسته شده} = ۱۱۲\pi - ۱۶\pi = ۹۶\pi$$

(هندسه دهم، صفحهٔ ۹۶)

۲۶. گزینه ۳ صحیح است.

نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۱/۵ هستند روی دو خط موازی با d، در طرفین d و به فاصلهٔ ۱/۵ از d قرار دارند. این دو خط را l و l' می‌نامیم.

نقاطی که از خط d' به فاصلهٔ ۲ هستند روی دو خط موازی با d'، در طرفین d' و فاصلهٔ ۲ از d' واقع‌اند. این دو خط را Δ و Δ' می‌نامیم.

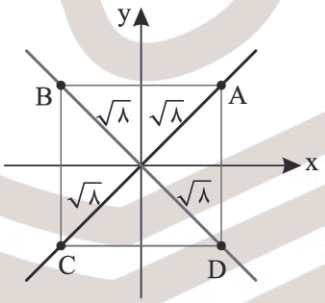


نقاط برخورد چهار خط l، l'، Δ و Δ'، نقاطی را مشخص می‌کنند که از خط d به فاصلهٔ ۱/۵ و از خط d' به فاصلهٔ ۲ هستند. چهار نقطهٔ M، N، P و Q نقاط موردنظر هستند.

(هندسه دوازدهم، صفحهٔ ۳۸)

۲۷. گزینه ۴ صحیح است.

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از محورهای مختصات به یک فاصله‌اند نیمسازهای زاویه‌های آن یعنی خطوط $y=x$ و $y=-x$ هستند و مکان هندسی نقاطی از صفحه که از مبدأ مختصات به فاصلهٔ $\sqrt{۸}$ است، دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{۸}$ است. برخورد این دایره با نیمسازها چهار نقطهٔ A، B، C و D است. این نقاط رئوس مربع ABCD به قطر $۲\sqrt{۸}$ است.



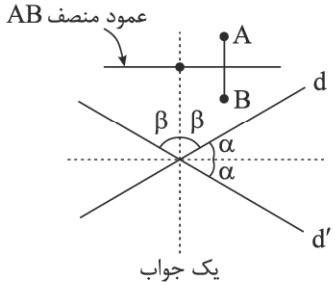
$$\text{قطر مربع} = AB\sqrt{۲} \Rightarrow ۲\sqrt{۸} = AB\sqrt{۲} \Rightarrow AB = ۴$$

پس مکان مورد نظر چهار رأس مربع به ضلع ۴ است.

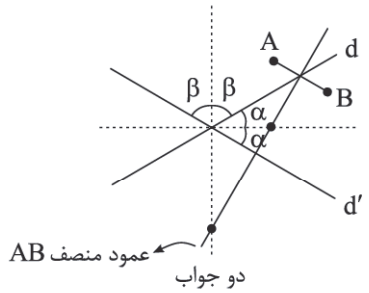
(هندسه دوازدهم، صفحهٔ ۳۶)

۲۸. گزینه ۱ صحیح است.

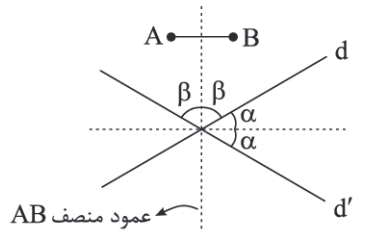
مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند، نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط است و مکان هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. عمودمنصف AB مطابق شکل‌های زیر می‌تواند یکی از نیمسازها را قطع کند یا هر دو نیمساز را قطع کند و یا بر یکی از نیمسازها منطبق باشد. بنابراین مکان هندسی موردنظر می‌تواند یک یا دو نقطه یا بی‌شمار نقطه باشد.



یک جواب



دو جواب



بی‌شمار جواب

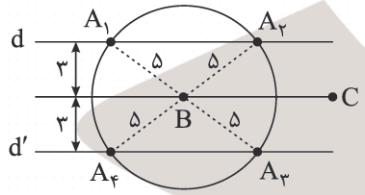
(هندسه دوازدهم، صفحهٔ ۳۸)

۲۹. گزینه ۳ صحیح است.

فرض کنیم AH ارتفاع وارد بر ضلع BC در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ باشد. در این صورت می‌نویسیم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}AH \times BC \Rightarrow ۱۲ = \frac{۱}{۲}AH \times ۸ \Rightarrow AH = ۳$$

پس نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ واحد از خط گذرنده از B و C قرار دارد. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ A دو خط موازی d و d' در طرفین خط گذرنده از B و C به فاصلهٔ ۳ از BC است.

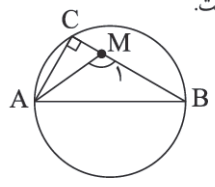


از طرف دیگر مکان هندسی نقاطی که از B به فاصلهٔ ۵ هستند، دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۵ است. برخورد دو خط موازی d و d' با این دایره چهار نقطهٔ $A_۱$ ، $A_۲$ ، $A_۳$ ، $A_۴$ است که جواب‌های این سؤال هستند. (شکل را ببینید.)

(هندسه دوازدهم، صفحهٔ ۳۸)

۳۰. گزینه ۴ صحیح است.

دایره به قطر AB را رسم می‌کنیم. هر نقطه روی این دایره مثل C انتخاب کنیم (به‌جز نقاط A و B) در این صورت زاویهٔ $\hat{ACB}$ محاطی روبه‌رو به قطر AB است؛ پس $\hat{C} = ۹۰^\circ$ است.



بنابراین هر نقطه داخل دایره مثل M با پاره‌خط AB زاویه‌ای منفرجه می‌سازد. زیرا زاویهٔ $\hat{M}_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{AMC}$ است؛ پس $\hat{M}_۱ > ۹۰^\circ$ است.

بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M سطح دایره به قطر AB به‌جز نقاط A و B و قطر AB است.

دقت کنید! اگر M روی قطر AB باشد، آنگاه مثلثی ایجاد نمی‌شود تا زاویهٔ $\hat{AMB}$ منفرجه درآید پس نقاط روی قطر AB هم متعلق به این مکان هندسی نیست.

(هندسه دوازدهم، صفحهٔ ۳۹)

ریاضیات گسسته

۳۱. گزینه ۲ صحیح است.

ابتدا صندلی اول و آخر را پر می‌کنیم و سپس بقیهٔ صندلی‌ها را.

$$\underset{\text{صندلی اول}}{۵} \times \underset{\text{صندلی آخر}}{۴} \times \underset{\text{انتخاب ۳ صندلی خالی}}{\binom{۶}{۳}} \times \underbrace{۳!}_{\text{پر کردن آنها}} = ۵! \times \binom{۶}{۳} = ۵! \times \frac{۶!}{۳!۳!}$$

$$= \frac{۵! \times ۵!}{۳!}$$

(ریاضی دهم، صفحه‌های ۱۱۹ و ۱۳۹)

۳۲. گزینه ۴ صحیح است.

می‌خواهیم ۶ خانهٔ خالی را پر کنیم. ابتدا جای c و h و سپس جای o و e را انتخاب می‌کنیم.

$$\underset{\text{h , c}}{\binom{۶}{۲}} \times \underset{\text{e , o}}{\binom{۴}{۲}} \times \underbrace{۲!}_{\text{بقیهٔ حروف}} = \frac{۶!}{۲!۴!} \times \frac{۴!}{۲!۲!} \times ۲! = \frac{۶!}{۲!۲!} = ۱۸۰$$

(ریاضی دهم، صفحه‌های ۱۱۹ و ۱۳۹)

۳۳. گزینه ۳ صحیح است.

v و n کنار هم باشند $-$ کل

$$\text{(o,e,i)} \times \times \times \times \times \quad \text{(o,e,i)} \times \times \times \text{(v,n)}$$

$$۶!۳! - ۵!۲!۳! = ۲۸۸۰$$

(ریاضی دهم، صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۳۹)

۳۴. گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{cases} ab \overset{m}{\equiv} ۱ \\ ac \overset{m}{\equiv} ۳ \\ bc \overset{m}{\equiv} ۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرب}} (abc)^۲ \overset{m}{\equiv} ۶$$

$$\begin{cases} ab \overset{m}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times c} c \overset{m}{\equiv} abc \\ ac \overset{m}{\equiv} ۳ \xrightarrow{\times b} ۳b \overset{m}{\equiv} abc \\ bc \overset{m}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\times a} ۲a \overset{m}{\equiv} abc \end{cases} \Rightarrow ۲a + ۳b + c \overset{m}{\equiv} ۳abc$$

$$(۲a + ۳b + c)^۲ \overset{m}{\equiv} (۳abc)^۲ \overset{m}{\equiv} ۹(abc)^۲ \overset{m}{\equiv} ۵۴$$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۱۸ و ۲۱)

۳۵. گزینه ۳ صحیح است.

$$\left.\begin{matrix} ۵^{۱۴۰۴} \overset{۴}{\equiv} ۱ \\ ۱۴۰۴! \overset{۱۰}{\equiv} ۰ \end{matrix}\right\} (۱۴۰۴! + ۱۴۰۴)^{۵^{۱۴۰۴}} \overset{۱۰}{\equiv} ۴^{۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۴$$

$$۱۴۰۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۴$$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۳۶. گزینه ۲ صحیح است.

می‌دانیم شرط جواب معادلهٔ سیاله این است که: $(۱۸۷ , ۲۰۴) \mid ۵n - ۱$

$(۱۸۷ , ۲۰۴) = ۱۷$ است.

$$۱۷ \mid ۵n - ۱ \Rightarrow ۵n \overset{۱۷}{\equiv} ۱ \overset{۱۷}{\equiv} ۳۵ \Rightarrow n \overset{۱۷}{\equiv} ۷ \Rightarrow n = ۱۷q + ۷ \ , \ q \in \mathbb{Z}$$

چون n یک عدد ۲رقمی است، q مقادیر $q = ۱ , ۲ , \dots , ۵$ را اختیار می‌کند. پس ۵ مقدار وجود دارد.

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۲۴ و ۳۰)

۳۷. گزینه ۱ صحیح است.

$$۳۸۰x + ۵۸۰y = ۶۲۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲۰} ۱۹x + ۲۹y = ۳۱$$

$$۲۹y \overset{۱۹}{\equiv} ۳۱ \Rightarrow ۱۰y \overset{۱۹}{\equiv} -۷ + ۵۷ = ۵۰$$

$$y \overset{۱۹}{\equiv} ۵ \Rightarrow y^۳ \overset{۱۹}{\equiv} ۱۲۵ \overset{۱۹}{\equiv} ۱۱$$

$$y^۳ - ۲y \overset{۱۹}{\equiv} ۱۱ - ۲(۵) = ۱$$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۲۶ و ۲۷)

۳۸. گزینه ۲ صحیح است.

$$a = ۲۸b + ۱۷ \Rightarrow ۵ \mid a \Rightarrow a \overset{۵}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲۸b + ۱۷ \overset{۵}{\equiv} ۰ \Rightarrow -۲b + ۲ \overset{۵}{\equiv} ۰$$

$$۰ \le ۱۷ < b$$

$$\Rightarrow b \overset{۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow b = ۵q + ۱ \xrightarrow{b > ۱۷} q \ge ۴$$

پس کافی است $q = ۴$ باشد.

$$q = ۴ \Rightarrow b = ۵q + ۱ = ۲۱$$

$$\Rightarrow a = ۲۸ \times b + ۱۷ = ۲۸ \times ۲۱ + ۱۷ = ۶۰۵$$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۱۸ و ۳۰)

۳۹. گزینه ۱ صحیح است.

می‌دانیم $n! \overset{۱۴}{\equiv} ۰ \ (n \ge ۷)$ پس:

$$۲! + ۴! + \dots + ۹۸! \overset{۱۴}{\equiv} ۲! + ۴! + ۶! \overset{۱۴}{\equiv} ۲ + ۲۴ + ۷۲۰ \overset{۱۴}{\equiv} ۴$$

پس معادله به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$۲۲x \overset{۱۴}{\equiv} ۴ \xrightarrow{۲۲ \overset{۱۴}{\equiv} ۸} ۸x \overset{۱۴}{\equiv} ۴ \xrightarrow[(۴ , ۱۴) = ۲]{\div ۴} ۲x \overset{۷}{\equiv} ۱ \overset{۷}{\equiv} ۸$$

$$\Rightarrow x \overset{۷}{\equiv} ۴ \overset{۷}{\equiv} ۱۰۲$$

پس $x = ۱۰۲$ و مجموع ارقام آن ۳ است.

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۲۴ و ۳۰)

۴۰. گزینه ۳ صحیح است.

می‌دانیم $۱۰^۲ \overset{۳۳}{\equiv} ۱$ و $۱۰^۴ \overset{۳۳}{\equiv} ۱$ است.

$$\overline{a۴۲b۱} \overset{۳۳}{\equiv} a \times ۱۰^۴ + ۴۲ \times ۱۰^۲ + \overline{b۱} \overset{۳۳}{\equiv} a + ۴۲ + b \times ۱۰ + ۱$$

$$\overset{۳۳}{\equiv} \overline{ba} + ۴۳ \overset{۳۳}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow \overline{ba} \overset{۳۳}{\equiv} -۱۰ \overset{۳۳}{\equiv} ۲۳ \Rightarrow \overline{ba} = ۲۳$$

۸۹ یا ۵۶ یا ۲۳

مجموع قابل قبول بر $\overline{ab}$ برابر $۱۹۵ = ۳۲ + ۶۵ + ۹۸$ است.

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۲۲ و ۲۴)

فیزیک

۴۱. گزینه ۴ صحیح است.

۱) نادرست، در لحظهٔ تغییر جهت تندی حرکت صفر می‌شود و چون جهت حرکت عوض شده است، پس قطعاً جسم در این لحظه شتاب داشته و به آن نیرو وارد می‌شود.

۲) نادرست، به طور مثال در پرتاب یک گلوله به بالا در نقطه اوج جسم به طور لحظه‌ای سرعتش صفر می‌شود ولی در این لحظه به جسم نیروی وزن وارد می‌شود، پس نیروهای وارد بر جسم متوازن نیستند.

۳) نادرست، جسم لزوماً در جهت برایند نیروها حرکت نمی‌کند، بلکه شتاب می‌گیرد، مثلاً در حرکت کندشونده بر روی خط راست، جهت نیرو در خلاف جهت سرعت (جهت حرکت) است.

۴) درست، وقتی سرعت جسم ثابت است، یعنی اندازه و جهت سرعت هر دو ثابت هستند، پس شتاب حرکت صفر خواهد بود و نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند.

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳۰ تا ۳۳)

۴۲. گزینه ۱ صحیح است.

به کمک قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow\begin{cases}F=m_1\times4\Rightarrow m_1=\frac{F}{4}\ (I)\\ F=m_2\times1\Rightarrow m_2=F\ (II)\end{cases}$$

در ادامه نیروی F به جسمی به جرم $\frac{m_1+m_2}{2}$ وارد می‌شود. در این حالت داریم:

$$a=\frac{F}{m}=\frac{F}{\frac{m_1+m_2}{2}}\xrightarrow{(I),\ (II)}a=\frac{F}{\frac{\frac{F}{4}+F}{2}}=\frac{2F}{\frac{F}{4}+F}=\frac{8}{5}=1/6\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳۲ و ۳۳)

۴۳. گزینه ۲ صحیح است.

با توجه به اینکه معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک یک سهمی است، پس شتاب حرکت ثابت است و در نتیجه نیروی خالص متوسط و لحظه‌ای یکسان بوده و به زمان حرکت بستگی ندارد.

$$\begin{cases}x=-0/5t^2+18t+11\\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\end{cases}$$

$$\frac{1}{2}a=-0/5\Rightarrow a=-1\frac{m}{s^2}$$

$$\vec{F}_{net}=m\vec{a}\Rightarrow|\vec{F}_{net}|=m\times|\vec{a}|=0/5\times1=0/5N$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳۲ و ۳۳)

۴۴. گزینه ۳ صحیح است.

سؤال واکنش نیروهای وارد بر جسم را خواسته است. ابتدا خود نیروهای وارد بر جسم را تعیین می‌کنیم.

بر جسم دو نیرو وارد می‌شود: ۱) نیروی وزن ۲) نیروی کشش طناب (T)

طبق قانون سوم نیوتون، واکنش هر نیرویی بر عامل به واردکننده‌اش وارد می‌شود. واکنش نیروی وزن جسم بر زمین و واکنش نیروی طناب بر جسم، از طرف جسم بر طناب وارد می‌شود؛ یعنی واکنش نیروهای وارد بر جسم، بر زمین و طناب وارد خواهد شد.

(فیزیک دوازدهم، صفحهٔ ۳۴)

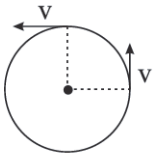
۴۵. گزینه ۲ صحیح است.

الف و ب) درست هستند. وقتی توپ ساکن است، یعنی طبق قانون اول نیوتون نیروهای وارد بر آن متوازن است (برایند نیروها صفر است.)

در عبارت (ب) هم وقتی چترباز با تندی حدی (ثابت) پایین می‌آید، اندازه و جهت سرعت آن ثابت است. پس طبق قانون اول نیوتون نیروهای وارد بر آن متوازن است.

ج و د) نادرست، زیرا وقتی اتومبیل پیچ جاده را دور می‌زند یا ماهواره با تندی ثابت به دور زمین می‌چرخد، با آنکه اندازهٔ سرعت ثابت است ولی جهت سرعت تغییر می‌کند. پس نمی‌توان گفت بردار سرعت ثابت است (سرعت کمیتی برداری است و برای ثابت ماندن آن، باید اندازه و جهت آن هر دو ثابت باشند) پس نیروها متوازن نیستند.

به شکل دقت کنید. بردار سرعت همیشه بر مسیر حرکت مماس است و مطابق شکل جهت آن روی مسیرهای دایره‌ای مثل چرخش در میدان و یا گردش به دور زمین تغییر می‌کند.



(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۲۸ تا ۳۳)

۴۶. گزینه ۳ صحیح است.

در حالت اول شتاب حرکت رو به بالا است.

$$a\uparrow\rightarrow F_N-mg=ma$$

$$60-10m=m\times2\Rightarrow12m=60\Rightarrow m=5kg$$

در حالت دوم چون آسانسور به صورت کندشونده پایین می‌رود، پس شتاب حرکت باز هم رو به بالا است.

$$a\uparrow\Rightarrow F_N-mg=ma$$

$$F_N-5\times10=5\times4\Rightarrow F_N=70N$$

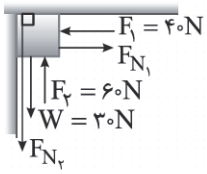
(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

۴۷. گزینه ۳ صحیح است.

چون F و f_k به یک جسم وارد می‌شوند عکس‌العمل هم نیستند، اما چون سرعت جسم ثابت است با یکدیگر برابرند. واکنش نیروی F به عاملی که نیرو را وارد کرده اعمال می‌شود. واکنش نیروی f_k و F_N به سطح تماس وارد می‌شود.

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۴۸. گزینه ۲ صحیح است.



$$\begin{cases}F_{N_1}=40N\\ 30+F_{N_2}=60\Rightarrow F_{N_2}=30N\end{cases}$$

$$\Rightarrow F_N=\sqrt{40^2+30^2}=50N$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

۴۹. گزینه ۱ صحیح است.

الف) درست، چون در راه رفتن سطح کفش‌ها روی سطح نمی‌لغزد.

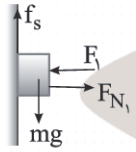
ب) نادرست، معمولاً μ_k از μ_s کمتر است.

ج) نادرست، نیروی اصطکاک جنبشی بستگی به جنس سطح تماس و نیروی عمودی تکیه‌گاه دارد.

د) نادرست، نیروی مقاومت شاره می‌تواند کمتر، مساوی یا بزرگ‌تر از نیروی وزن باشد. مثلاً وقتی چترباز، چتر خود را باز می‌کند نیروی مقاومت شاره، بیشتر از وزن می‌شود.

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳۹ تا ۴۳)

۵۰. گزینه ۲ صحیح است.



$$1)\begin{cases}F_{N_1}=F\\ f_{s_1}=mg\end{cases}\qquad R_1=\sqrt{F^2+W^2}$$

$$2)\begin{cases}F_{N_2}=2F\\ f_{s_2}=mg\end{cases}\qquad R_2=\sqrt{4F^2+W^2}$$

$$R_2=\sqrt{\frac{13}{10}}R_1\Rightarrow\sqrt{4F^2+W^2}=\sqrt{\frac{13}{10}}\sqrt{F^2+W^2}$$

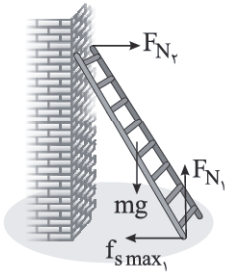
$$4F^2+W^2=\frac{13}{10}(F^2+W^2)\Rightarrow40F^2+10W^2=13F^2+13W^2$$

$$\Rightarrow27F^2=3W^2\Rightarrow9F^2=W^2$$

$$F=\frac{1}{3}W=\frac{1}{3}\times30=10N$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

۵۱. گزینه ۳ صحیح است.



$$\begin{cases} f_{s\max_1} = \mu_s F_{N_1} \\ F_{N_1} = mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{s\max_1} = ۰/۵ \times ۴۰۰ = ۲۰۰N \\ F_{N_1} = ۴۰۰N \end{cases}$$

$$R_1 = \sqrt{F_{N_1}^2 + f_{s\max_1}}$$

$$R = \sqrt{۲۰۰^2 + ۴۰۰^2} = ۲۰۰\sqrt{۱^2 + ۲^2} = ۲۰۰\sqrt{۵}N$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۴۵ و ۴۶)

۵۲. گزینه ۴ صحیح است.

در حالت اول: $F = f_k \Rightarrow F = \mu_k(F + mg) \Rightarrow F = ۰/۲(F + ۱۰۰)$

$F = ۰/۲F + ۲۰ \Rightarrow ۰/۸F = ۲۰ \Rightarrow F = ۲۵N$

در حالت دوم: $F - f_k = ma \Rightarrow F - \mu_k \times mg = ma$

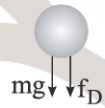
$$۲۵ - ۰/۲ \times ۱۰۰ = ۱۰a \Rightarrow a = ۰/۵\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳۹ تا ۴۵)

۵۳. گزینه ۳ صحیح است.

در سرعت حدی نیروی وزن با نیروی مقاومت هوا برابر است، پس وقتی تندی جسم $۴۰۰\frac{m}{s}$ است، نیروی وزن با مقاومت هوا یکسان می‌شود.

حال اگر جسم با تندی $۴۰۰\frac{m}{s}$ به سمت بالا پرتاب شود، در لحظهٔ پرتاب $f_D = mg$ است. بنابراین در لحظهٔ پرتاب:



$$mg + f_D = ma \xrightarrow{f_D = mg} ۲mg = ma \Rightarrow a = ۲۰\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳۶ و ۳۷)

۵۴. گزینه ۱ صحیح است.

در حالت اول: $mg = F_e \Rightarrow mg = k\Delta L \Rightarrow ۱۰m = k \times ۰/۰۲$

$$\Rightarrow k = ۵۰۰m$$

در حالت دوم: $F_e - mg = ma \Rightarrow k\Delta L = m(g + a)$

$$۵۰۰m \times \Delta L = m(۱۰ + ۲) \Rightarrow \Delta L = \frac{۱۲}{۵۰۰} \quad m = ۲/۴cm$$

$$L = ۱۰ + ۲/۴ = ۱۲/۴cm$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳۷ تا ۴۴)

۵۵. گزینه ۲ صحیح است.

جهت بردارهای نیروی کشسانی فنر و نیروی اصطکاک به سمت چپ (خلاف جهت حرکت) است.

$$F_e + f_k = ma \Rightarrow k\Delta x + \mu_k mg = ma$$

$$\Rightarrow ۲۰۰ \times \frac{۵}{۱۰۰} + \mu_k \times ۴۰ = ۴ \times ۳ \Rightarrow \mu_k = ۰/۰۵$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳۷ تا ۴۴)

۵۶. گزینه ۲ صحیح است.

در لحظهٔ t_1: $mg - f_d = ma \Rightarrow ۱۰m - ۰/۰۰۸ = m \times ۶$

$$\Rightarrow ۴m = ۰/۰۰۸ \Rightarrow m = ۰/۰۰۲kg$$

در لحظهٔ برخورد به زمین قطرهٔ باران به سرعت حدی رسیده و نیروی مقاومت هوا برابر وزن می‌شود.

در لحظهٔ برخورد به زمین: $f_d = mg = ۰/۰۰۲ \times ۱۰ = ۰/۰۲N$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۵۷. گزینه ۱ صحیح است.

اگر جهت مثبت را رو به بالا بگیریم، شتاب متوسط جسم در حین بالا رفتن برابر خواهد بود با:

$$a_{av} = \frac{v - v_\circ}{\Delta t} = \frac{۰ - ۶۰}{۴ - ۰} = -۱۵\frac{m}{s^2}$$

بنابر قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_{net_y} = ma_{av} \Rightarrow -mg - f_D = ma_{av}$$

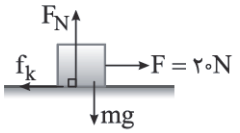
$$\xrightarrow{\substack{a = -۱۵\frac{m}{s^2} \\ m = ۱kg}} (-۱ \times ۱۰) - f_D = ۱ \times (-۱۵) \Rightarrow -۱۰ - f_D = -۱۵$$

$$\Rightarrow f_D = ۵N$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

۵۸. گزینه ۳ صحیح است.

قبل از قطع نیروی F:



$$F - f_k = ma \Rightarrow ۲۰ - ۰/۳ \times ۴۰ = ۴a_1$$

$$\Rightarrow a_1 = ۲\frac{m}{s^2}$$

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^2 = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۳^2 = ۹m$$

$$v = at + v_\circ = ۲ \times ۳ + ۰ = ۶\frac{m}{s}$$

بعد از قطع نیروی F فقط نیروی اصطکاک جنبشی به جسم وارد می‌شود.

$$۰ - ۰/۳ \times ۴۰ = ۴a_2 \Rightarrow a_2 = -۳\frac{m}{s^2}$$

سرعت نهایی مرحلهٔ قبل سرعت اولیه برای مرحلهٔ دوم است.

$$v_2^2 - v_\circ^2 = ۲a\Delta x \Rightarrow ۰ - ۶^2 = ۲(-۳)\Delta x$$

$$\Delta x_2 = ۶m$$

$$\Delta x_t = ۹ + ۶ = ۱۵m$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

۵۹. گزینه ۴ صحیح است.

$$F - mg = ma$$

$$۳۰ - ۲۵ = ۲/۵a \Rightarrow a = ۲\frac{m}{s^2}$$

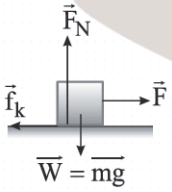
$$v = at + v_\circ$$

$$v = ۲ \times ۵ + ۰ = ۱۰\frac{m}{s}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

۶۰. گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا شکلی از مسئله و نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:



برای آنکه سرعت جسم کم نشود، باید جهت شتاب حرکت در جهت حرکت بماند (در این صورت سرعت افزایش می‌یابد) یا حداقل شتاب صفر شود (در این صورت سرعت ثابت می‌ماند) در این حالت خواهیم داشت:

$$f_k = \mu_k.F_N \xrightarrow[\mu_k = \frac{۱}{۴}]{F_N = mg} f_k = \frac{۱}{۴}(۴)(۱۰) = ۱۰N \Rightarrow f_k = ۱۰N$$

طبق قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_{net} = ۰ \Rightarrow F - f_k = ۰ \Rightarrow F = f_k = ۱۰N$$

حداکثر تغییرات F برابر خواهد بود با:

$$\Delta F = ۴۰ - ۱۰ = ۳۰N$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳۹ تا ۴۳)

۶۱. گزینه ۱ صحیح است.

مجموع تغییرات انرژی پتانسیل و تغییرات انرژی جنبشی برابر کار نیروی مقاومت هوا است. بنابراین:

$$\Delta U + \Delta K = W_{f_D} \xrightarrow[\Delta K = +۲۵J]{\Delta U = -۳۰J} -۳۰ + ۲۵ = W_{f_D}$$

$$\Rightarrow W_{f_D} = -۵J$$

$$W_{f_D} = -f_D \times d \Rightarrow -۵ = -f_D \times ۱۰ \Rightarrow f_D = ۰/۵N$$

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۷۱ تا ۷۳)

۶۲. گزینه ۱ صحیح است.

با استفاده از تندی اولیه و انرژی جنبشی، جرم اتومبیل را محاسبه می‌کنیم:

$$K=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 200\times10^3=\frac{1}{2}\times m\times400 \Rightarrow 200\times10^3=200m$$
$$\Rightarrow m=1000kg$$

با استفاده از قضیهٔ کار و انرژی جنبشی داریم:

$$W_t=\Delta K=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)\xrightarrow[v_1=20\frac{m}{s},\ v_2=-40\frac{m}{s}]{m=1000kg}$$
$$W_t=\frac{1}{2}\times1000((-40)^2-20^2)=6\times10^5J$$

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۶۱ تا ۶۳)

۶۳. گزینه ۱ صحیح است.

$$K_1=K_2 \Rightarrow \frac{1}{2}m_1v_1^2=\frac{1}{2}m_2v_2^2 \Rightarrow m_1v^2=m_2(2v)^2$$
$$\Rightarrow m_2=\frac{1}{4}m_1 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \text{درصد تغییرات جرم}: \frac{\Delta m}{m_1}=\frac{\frac{1}{4}m_1-m_1}{m_1}=-\frac{3}{4}=-0/75=\%-75$$

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۵۴ و ۵۵)

۶۴. گزینه ۳ صحیح است.

طبق رابطهٔ بازده داریم:

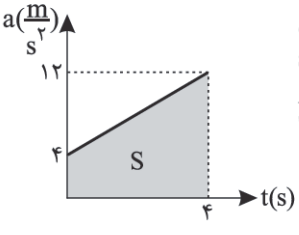
$$Ra=\frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}}\times100 \Rightarrow Ra=\frac{\frac{W_{\text{مفید}}}{t_1}}{\frac{W_{\text{کل}}}{t_2}}\times100$$
$$\Rightarrow Ra=\frac{\frac{mgh}{t_1}}{\frac{W_{\text{ورودی}}}{t_2}}\times100\xrightarrow{V=20lit \Rightarrow m=\rho\times V=20kg}$$
$$Ra=\frac{\frac{20\times10\times15}{1}}{\frac{12000}{3}}\times100=\frac{3000}{4000}\times100=\%75$$

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

۶۵. گزینه ۴ صحیح است.

$$F(t)=4t+8$$
$$t=0 \Rightarrow F_1=8N \Rightarrow a_1=\frac{F_1}{m}=\frac{8}{2}=4\frac{m}{s^2}$$
$$t=4s \Rightarrow F_2=24N \Rightarrow a_2=\frac{F_2}{m}=\frac{24}{2}=12\frac{m}{s^2}$$

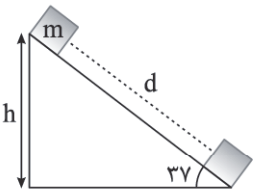
ابتدا نمودار شتاب ـ زمان این جسم را رسم می‌کنیم و سطح محصور بین این نمودار و محور زمان که تغییرات سرعت است را محاسبه می‌کنیم.



$$S_{v-t}=\Delta V \Rightarrow (\frac{12+4}{2})\times4=\Delta V \Rightarrow \Delta V=32\frac{m}{s}$$
$$V_0=0\ ,\ V=32\frac{m}{s}$$
$$W_t=\Delta K=\frac{1}{2}m(V^2-V_0^2)=\frac{1}{2}\times2((32)^2-0)=1024J$$

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۶۱ تا ۶۴)

۶۶. گزینه ۱ صحیح است.



اگر فرض کنیم مطابق شکل جسم از ارتفاع h تا پایین سطح شیب‌دار حرکت کند، داریم:

$$W_t=W_{mg}+W_{f_k}$$

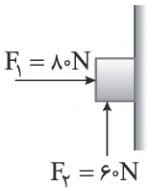
چون تندی ثابت است، کل کار انجام شده بر روی جسم صفر است.

$$0=W_{mg}+W_{f_k} \Rightarrow 0=mgh-f_k\times d$$
$$mgh=f_k\times d \Rightarrow \frac{f_k}{mg}=\frac{h}{d}=\sin37=0/6$$

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۶۱ تا ۶۴)

۶۷. گزینه ۱ صحیح است.

اگر نیروی وارد بر جسم عمود بر جابه‌جایی جسم باشد، کار آن نیرو صفر است.



نیروی F را روی شکل تجزیه می‌کنیم و کار هر نیرو را به دست می‌آوریم:

$$W_{F_1}=F_1d\cos\theta=80\times8\times\cos90^\circ=0$$
$$W_{F_2}=F_2d\cos\theta=60\times8\times\cos0=480J$$
$$W_F=W_{F_1}+W_{F_2}=0+480=480J$$

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۵۵ تا ۶۰)

۶۸. گزینه ۲ صحیح است.

$$\rho=1\frac{kg}{lit}$$

ابتدا جرم آب را محاسبه می‌کنیم:

$$\rho=\frac{m}{V} \Rightarrow 1=\frac{m}{4\times10^3} \Rightarrow m=4000kg$$

طبق قضیهٔ کار و انرژی داریم:

$$W_t=\Delta K \Rightarrow W_{\text{پمپ}}+W_{mg}=\Delta K$$
$$\xrightarrow{W_{mg}=-\Delta U} W_{\text{پمپ}}=\Delta K+\Delta U=(K_2-K_1)+(U_2-U_1)$$
$$\Rightarrow W_{\text{پمپ}}=\frac{1}{2}\times4000\times20^2+4000\times10\times25$$
$$\Rightarrow W_{\text{پمپ}}=2000\times400+100\times10^4=8\times10^5+10\times10^5$$
$$=18\times10^5J=1800kJ$$
$$P=\frac{W}{t}=\frac{1800}{60}=30kW$$

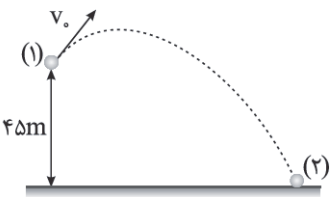
حال بازده پمپ را به دست می‌آوریم:

$$Ra=\frac{30}{50}\times100=0/6\times100=\%60$$

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

۶۹. گزینه ۲ صحیح است.

اگر مبدأ پتانسیل گرانشی را سطح زمین فرض کنیم، با توجه به پایسته بودن انرژی مکانیکی داریم:



$$E_1=E_2 \Rightarrow U_1+K_1=U_2+K_2$$
$$\Rightarrow \cancel{m}gh_1+\frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2=\frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2 \Rightarrow 10\times45+\frac{1}{2}\times900=\frac{1}{2}\times v_2^2$$
$$\Rightarrow 450+450=\frac{1}{2}v_2^2 \Rightarrow v_2^2=900\times2 \Rightarrow v_2=30\sqrt{2}\frac{m}{s}$$

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۷۰. گزینه ۳ صحیح است.

ابتدا کار کل نیروهای وارد بر جسم را محاسبه می‌کنیم:

$$W_t = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\times 2\times(2^2 - 0) = 4J$$

کار کل برابر مجموع کار نیروهای وارد بر جسم است، پس:

$$W_t = W_F + W_{f_k} \Rightarrow W_t = Fd\cos\theta + W_{f_k}$$

$$\Rightarrow 4 = 20\times 0/8\times 0/8 + W_{f_k} \Rightarrow 4 = 12/8 + W_{f_k} \Rightarrow W_{f_k} = -8/8J$$

$$\Rightarrow -f_k d = -8/8 \Rightarrow f_k \times 0/8 = 8/8 \Rightarrow f_k = \frac{8/8}{0/8} = 11N$$

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۶۱ تا ۶۴)

شیمی

۷۱. گزینه ۳ صحیح است.

شیب نمودار «انحلال‌پذیری ـ دما» برای نمک $NaNO_3$ بزرگ‌تر از نمک KCl است؛ بنابراین تأثیر دما بر انحلال‌پذیری $NaNO_3$ بیشتر از KCl است.

بررسی گزینه ۱) در دمای $25°C$، $Ca_3(PO_4)_2$ و $CaSO_4$ به ترتیب در آب نامحلول و کم‌محلول می‌باشند.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۳ و ۱۰۹)

۷۲. گزینه ۴ صحیح است.

با توجه به اینکه جرم رسوب تشکیل شده از جرم حل‌شونده اضافی حل شده در محلول بیشتر است، می‌توان دریافت که محلول اولیهٔ فراسیرشده بوده است.

پس از رسوب $3g\ (=4-7)$ حل‌شونده اضافی، محلول حاصل سیرشده است و جرم آن برابر $270g\ (=300-273)$ است. با توجه به اینکه $150g$ محلول را آب تشکیل می‌دهد، جرم حل‌شونده موجود در آن برابر $120g$ است.

با توجه به اینکه انحلال‌پذیری برابر بیشترین مقدار حل‌شونده در $100g$ آب در دمای معین است، داریم:

$$S = 100g\text{آب}\times\frac{120g\text{حل‌شونده}}{150g} = 80g\text{حل‌شونده}/100g\,H_2O$$

(شیمی دهم، صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۳)

۷۳. گزینه ۴ صحیح است.

عبارت‌های (ب) و (ت) نادرست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

ب) میلهٔ شیشه‌ای مالش داده شده به موی خشک دارای بار الکتریکی منفی است، در نتیجه مولکول‌های آب از سر مثبت خود (اتم‌های هیدروژن) جذب آن می‌شوند.

ت) تنها ۳ مولکول CO_2، CH_4 و F_2 ناقطبی بوده و در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کنند.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۰۵)

۷۴. گزینه ۴ صحیح است.

در ساختار یخ، هر اتم اکسیژن به دو اتم هیدروژن با پیوند اشتراکی و به دو اتم هیدروژن دیگر با پیوند هیدروژنی متصل است.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۵، ۱۰۷ و ۱۰۸)

۷۵. گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به معادلهٔ داده شده، انحلال‌پذیری ترکیب یونی را در دمای $20°C$ محاسبه می‌کنیم: $S = 0/2\times 20 + 46 = 50g/100g\,H_2O$

اکنون با توجه به شمار یون‌های موجود در محلول، می‌توان $(n+m)$ را محاسبه کرد:

$$?ion = 240g\text{محلول}\times\frac{50g\,AnBm}{150g\text{محلول}}\times\frac{1mol\,AnBm}{160g\,AnBm}$$

$$\times\frac{(n+m)mol\,ion}{1mol\,AnBm}\times\frac{6/02\times10^{23}ion}{1mol\,ion} = 9/03\times10^{23} \Rightarrow n+m=3$$

(شیمی دهم، صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۳ و ۱۱۲)

۷۶. گزینه ۳ صحیح است.

عبارت‌های اول، سوم و چهارم صحیح هستند؛

بررسی عبارت‌ها:

مورد اول: گشتاور دوقطبی مولکول‌های H_2O و H_2S به ترتیب برابر $1/85D$ و $0/97D$ است.

مورد دوم: گشتاور دوقطبی هگزان به تقریب برابر صفر است.

مورد سوم: در میان ترکیب‌های HF، HCl و HBr تنها HF دارای نقطهٔ جوش بالاتر از $0°C$ است.

مورد چهارم: درست

(شیمی دهم، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۷ و ۱۱۱)

۷۷. گزینه ۴ صحیح است.

نیروی بین مولکولی در اتانول (CH_3CH_2OH) از نوع پیوند هیدروژنی و در استون $(CH_3\overset{O}{\overset{\|}{C}}CH_3)$ از نوع جاذبهٔ وان‌درووالسی است؛ در نتیجه اتانول نسبت به استون دارای نقطهٔ جوش بالاتری است.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۱۰۷ و ۱۱۱)

۷۸. گزینه ۳ صحیح است.

مقایسهٔ صحیح قدرت نیروهای بین مولکولی به صورت زیر است:

$$HCl < HBr < C_2H_5OH < I_2$$

دقت کنید که در دما و فشار اتاق I_2 جامد و اتانول مایع است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) معادلهٔ انحلال یک مول از ترکیب‌های داده شده به صورت زیر است:

$$Al(NO_3)_3(s)\xrightarrow{H_2O}Al^{3+}(aq)+3NO_3^-(aq)$$

$$BaCl_2(s)\xrightarrow{H_2O}Ba^{2+}(aq)+2Cl^-(aq)$$

۲) نقطهٔ جوش ترکیب‌های HF، NH_3 و H_2S به ترتیب برابر با $19°C$، $-33/5°C$ و $-60°C$ است.

۴) گاز NO قطبی است در حالی که دو گاز O_2 و N_2 ناقطبی هستند؛ میان دو گاز ناقطبی موجود نیز O_2 جرم مولی بیشتری دارد.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۱۲، ۱۱۴ و ۱۱۵)

۷۹. گزینه ۲ صحیح است.

موارد دوم، سوم و چهارم صحیح هستند.

بررسی موارد:

مورد اول: مخلوط‌های ید در هگزان، آمونیوم سولفات در آب و بنزین همگن هستند.

دقت کنید نقره کلرید $(AgCl)$ در آب نامحلول است و برم (Br_2) نیز ناقطبی بوده و در آب نامحلول است.

مورد دوم: در انحلال ترکیب‌های یونی برخلاف ترکیب‌های مولکولی در آب، مادهٔ حل‌شونده ویژگی‌های ساختاری خود را حفظ نمی‌کند.

مورد سوم: درست

مورد چهارم: آب و تینر (هگزان) هر دو مایع هستند اما از آنجا که آب قطبی و هگزان ناقطبی است، این دو ماده در یکدیگر حل نمی‌شوند.

مورد پنجم: آب، فراوان‌ترین و رایج‌ترین حلال در طبیعت، صنعت و آزمایشگاه است که می‌تواند بسیاری (نه همه!) از ترکیب‌های یونی و مواد مولکولی را در خود حل کند.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۲)

۸۰. گزینه ۲ صحیح است.

موارد (آ)، (پ) و (ت) صحیح هستند.

بررسی موارد:

آ) گاز آزاد شده، CO_2 است.

ب) با کاهش دما، میزان انحلال‌پذیری گازها در آب افزایش یافته و در نتیجه میزان گاز خروجی از نوشیدنی کاهش می‌یابد.

پ) یون موردنظر پتاسیم (K^+) است.

ت) درست

(شیمی دهم، صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۶)

۸۱. گزینه ۲ صحیح است.

در دمای ثابت با n برابر شدن فشار گازها، انحلال‌پذیری آنها نیز n برابر می‌شود. بنابراین انحلال‌پذیری گاز O_2 در فشار جدید برابر $۰/۱۵ (= ۰/۰۵ \times ۳)$ گرم در ۱۰۰g آب است.

با توجه به میزان انحلال‌پذیری گاز در دو فشار متفاوت، می‌توان دریافت که با افزایش فشار، در هر ۱۰۰ گرم آب می‌توان ۰/۱ $(۰/۰۵ - ۰/۱۵)$ گرم دیگر گاز اکسیژن حل نمود. اکنون می‌توان حجم گاز O_2 موردنیاز را محاسبه نمود:

$$?\,mL\,O_2 = ۶۴\,kg\,آب \times \frac{۱۰۰۰g}{۱kg} \times \frac{۰/۱g\,O_2}{۱۰۰g\,آب} \times \frac{۱mL\,O_2}{۰/۸g\,O_2} = ۸۰mL\,O_2$$

(شیمی دهم، صفحه‌های ۱۱۴ و ۱۱۵)

۸۲. گزینه ۴ صحیح است.

شکل، نشان دهنده فرایند اسمز معکوس است که در آن با اعمال نیرو بر محلول غلیظ، مولکول‌های آب با گذر از غشای نیمه‌تراوا از محلول غلیظ به محلول رقیق مهاجرت می‌کنند.

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) با حذف نیروی F فرایند اسمز انجام می‌شود.

۲) مولکول‌های آب از سمت چپ به سمت راست نیز جابه‌جا می‌شوند. اما جهت کلی حرکت مولکول‌های آب از سمت راست به چپ است.

۳) با گذشت زمان، سطح آب در لولهٔ سمت چپ افزایش می‌یابد.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۱۱۸ و ۱۱۹)

۸۳. گزینه ۲ صحیح است.

pH برای محلول‌های آبی در دمای اتاق با اعدادی در گسترهٔ ۰ تا ۱۴ بیان می‌شود.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۷)

۸۴. گزینه ۱ صحیح است.

عبارت‌های (آ) و (ب) صحیح هستند.

بررسی عبارت‌ها:

آ) درست

ب) بازهای بسیار قوی مانند سود سوزآور و پتاس سوزآور موادی خورنده به شمار می‌روند.

پ) ثابت یونش بازها با قدرت آنها رابطهٔ مستقیم دارد.

ت) در محلول A، $[H^+] < [OH^-]$ بوده و در نتیجه این محلول دارای خاصیت بازی است.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۲۶ تا ۲۹)

۸۵. گزینه ۱ صحیح است.

در حالت اولیه pH محلول برابر است با:

$$pH_1 = -\log[H^+]_1 = -\log ۱۰^{-۱} = ۱$$

اگر دو برابر حجم محلول به آن آب اضافه شود، حجم محلول نهایی ۳ برابر شده و غلظت $[H^+]$ موجود در آن $\frac{۱}{۳}$ برابر می‌شود.

$$[H^+]_۲ = \frac{۱۰^{-۱}}{۳} mol.L^{-۱} \Rightarrow pH_۲ = -\log[H^+]_۲ = -\log\frac{۱۰^{-۱}}{۳}$$

$$= -(\log ۱۰^{-۱} - \log ۳) = ۱/۵$$

در نتیجه pH محلول به اندازهٔ ۰/۵ واحد تغییر می‌کند.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۶)

۸۶. گزینه ۲ صحیح است.

با کاهش غلظت HBr، $[H^+]$ در محلول کاهش یافته و pH افزایش می‌یابد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) با رقیق کردن محلول بازی، $[OH^-]$ و pH محلول کاهش می‌یابد.

۳) با افزودن اسید به محلول بازی و انجام فرایند خنثی شدن، pH محلول کاهش می‌یابد.

۴) در اثر حل کردن گاز HCl در محلول، $[H^+]$ افزایش و pH کاهش می‌یابد.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۲۴، ۲۵، ۳۰ و ۳۱)

۸۷. گزینه ۴ صحیح است.

pH آب خالص برابر ۷ است و با ۵ واحد کاهش به ۲ می‌رسد، در این حالت داریم:

$$pH = ۲ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۲} mol.L^{-۱}$$

$$[H^+] = \frac{n(H^+)}{V(L)} \Rightarrow n(H^+) = ۱۰^{-۲} \times ۵۰ = ۰/۵\,mol$$

$$?\,mL\,گاز = ۰/۵\,mol\,H^+ \times \frac{۱mol\,گاز}{۱mol\,H^+} \times \frac{۲۲۴۰۰mL}{۱mol\,گاز} = ۱۱۲۰۰mL$$

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۶)

۸۸. گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به اطلاعات سؤال می‌توان دریافت:

$$M_{HA} = ۳M_{HB}$$

$$\alpha_{HB} = ۲\alpha_{HA} \Rightarrow \alpha_{HA} = \frac{۱}{۲}\alpha_{HB}$$

در اسید HA: $[H^+] = M_{HA}.\alpha_{HA} = ۳M_{HB}.\frac{۱}{۲}\alpha_{HB}$

$$= \frac{۳}{۲}M_{HB}.\alpha_{HB} \Rightarrow pH_{HA} = -\log[H^+] = -\log\frac{۳}{۲}M_{HB}.\alpha_{HB}$$

$$= -\log\frac{۳}{۲} - \log M_{HB}\alpha_{HB}$$

در اسید HB: $[H^+] = M_{HB}.\alpha_{HB} \Rightarrow pH_{HB} = -\log[H^+]$

$$= -\log M_{HB}.\alpha_{HB}$$

اکنون می‌توان اختلاف میان pH دو محلول را محاسبه کرد:

$$pH_{HB} - pH_{HA} = -\log M_{HB}\alpha_{HB} - [-\log\frac{۳}{۲} - \log M_{HB}\alpha_{HB}]$$

$$= \log\frac{۳}{۲} = \log ۳ - \log ۲ = ۰/۵ - ۰/۳ = ۰/۲$$

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۶)

۸۹. گزینه ۴ صحیح است.

تنها مورد (آ) صحیح است.

بررسی موارد نادرست:

ب) آب خالص در هر دمایی خنثی است زیرا در آن $[H^+] = [OH^-]$.

پ) هر چه pH یک محلول اسیدی کوچک‌تر باشد، می‌توان دریافت که $[H^+]$ در محلول اسید بیشتر است و راجع به قدرت اسیدی به طور قطع نمی‌توان اظهارنظر کرد.

ت) با افزودن NaOH به یک محلول اسیدی pH افزایش یافته تا اینکه در نقطهٔ خنثی شدن به ۷ می‌رسد و مجدداً با افزودن باز pH افزایش یافته و از ۷ فاصله می‌گیرد.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۲۶، ۲۸، ۳۰ و ۳۱)

۹۰. گزینه ۳ صحیح است.

آمونیاک از جمله بازهای ضعیف است. به طوری که در محلول آن افزون بر مقدار کمی از یون‌های آب‌پوشیده (OH^-, NH_4^+)، شمار بسیاری از مولکول‌های آمونیاک (NH_3) یافت می‌شود. اما دقت کنید که در این محلول افزون بر یون‌های ذکر شده، یون‌های H^+ نیز حضور دارند.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۲۶، ۲۷ و ۲۹)

۹۱. گزینه ۱ صحیح است.

عبارت‌های (آ) و (ت) صحیح هستند.

با توجه به مقدار K_b داده شده برای بازها، AOH دارای K_b بزرگ‌تری بوده و در نتیجه نسبت به $A'OH$ باز قوی‌تری است.

بررسی عبارت‌ها:

آ) اگر غلظت اولیهٔ باز را برابر M در نظر بگیریم، غلظت OH^- و کاتیون حاصل از یونش برابر $M\alpha$ و غلظت باز یونیده نشده برابر $(M-M\alpha)$ است و در نتیجه مجموع غلظت تمامی گونه‌ها برابر $M+M\alpha$ است، در غلظت یکسان غلظت گونه‌ها در محلول AOH بیشتر است زیرا α بزرگ‌تری دارد.

ب) مقدار pH محلول به غلظت اولیهٔ باز نیز بستگی دارد.

پ) برای خنثی نمودن مقدار معینی HCl، مقدار مول یکسانی از بازهای AOH و $A'OH$ نیاز است.

ت) در شرایط یکسان $[OH^-]$ در محلول $A'OH$ کمتر و در نتیجه $[H^+]$ در محلول آن بیشتر است.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۲۸ تا ۳۱)

۹۲. گزینه ۴ صحیح است.

با توجه به pH محلول سود سوزآور (NaOH) داریم:

$$pH=10/7 \Rightarrow [H^+]=10^{-pH}=10^{-10/7}=10^{-11}\times 10^{0/3}$$
$$=10^{-11}\times 10^{0/3}=2\times 10^{-11}\,mol.L^{-1}$$
$$\xrightarrow{[H^+][OH^-]=10^{-14}} [OH^-]=5\times 10^{-4}\,mol.L^{-1}$$

$$[OH^-]=\frac{n_1(OH^-)}{V(L)} \Rightarrow n_1(OH^-)=5\times 10^{-4}\times 5=25\times 10^{-4}\,mol$$

با توجه به pH نهایی محلول داریم:

$$pH=12 \Rightarrow [H^+]=10^{-12}\,mol.L^{-1}$$
$$\xrightarrow{[H^+][OH^-]=10^{-14}} [OH^-]=10^{-2}\,mol.L^{-1}$$

$$[OH^-]=\frac{n_2(OH^-)}{V(L)} \Rightarrow n_2(OH^-)=10^{-2}\times 5=5\times 10^{-2}\,mol$$

اکنون می‌توان مول OH^- اضافه شده به محلول را محاسبه نمود:

$$\text{مول } OH^- \text{ اضافه شده} = n_2-n_1=5\times 10^{-2}-25\times 10^{-4}$$
$$=4/75\times 10^{-2}\,mol$$

جرم $Ba(OH)_2$ اضافه شده به محلول برابر است با:

$$?g\,Ba(OH)_2=4/75\times 10^{-2}\,mol\,OH^-\times\frac{1\,mol\,Ba(OH)_2}{2\,mol\,OH^-}$$
$$\times\frac{170\,g\,Ba(OH)_2}{1\,mol\,Ba(OH)_2}\simeq 4/04\,g\,Ba(OH)_2$$

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۶، ۲۸ و ۲۹)

۹۳. گزینه ۳ صحیح است.

عبارت بیان شده در همهٔ گزینه‌ها برخلاف گزینه ۳ صحیح است.

خاکی که غلظت یون هیدرونیوم در آن برابر $3\times 10^{-4}\,mol.L^{-1}$ است، اسیدی بوده و گل ادریسی در آن به رنگ آبی شکوفا می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) حاصل‌ضرب $[H^+]\times[OH^-]$ تنها به دما وابسته بوده و به حجم محلول بستگی ندارد.

۲) معادلهٔ واکنش انجام شده را می‌توان به صورت $H^+(aq)+OH^-(aq)\rightarrow H_2O(l)$ نمایش داد.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۳۰ تا ۳۴)

۹۴. گزینه ۴ صحیح است.

همهٔ عبارت‌های بیان شده درست هستند.

بررسی موارد:

مورد اول: شیر منیزی یکی از رایج‌ترین ضداسیدها است که شامل منیزیم هیدروکسید $Mg(OH)_2$ است.

مورد دوم: درون معده یک محیط بسیار اسیدی است که حتی می‌تواند فلز روی را در خود حل کند.

مورد سوم: درست

مورد چهارم: درست

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۲۵ و ۳۱ تا ۳۵)

۹۵. گزینه ۳ صحیح است.

قسمت اول: غلظت یون OH^- موجود در محلول برابر است با:

$$[OH^-]=\frac{10^{-11}}{V(L)}\xrightarrow{[H^+][OH^-]=10^{-14}}[H^+]=10^{-3}\,V\,mol.L^{-1}$$
$$=[HBr]$$

اکنون با توجه به غلظت ppm و چگالی محلول می‌توان V را محاسبه نمود:

$$?g\,HBr=V\,L\,\text{محلول}\times\frac{10^{-3}\,V\,mol\,HBr}{1\,L\,\text{محلول}}\times\frac{81\,g\,HBr}{1\,mol\,HBr}$$
$$=81\times 10^{-3}\,V^2\,g\,HBr$$

$$?g\,\text{محلول}=V\,L\,\text{محلول}\times\frac{1000\,mL}{1\,L}\times\frac{1/1\,g\,\text{محلول}}{1\,mL\,\text{محلول}}=1/1\times 10^3\,V$$

$$\Rightarrow ppm\,HBr=\frac{\text{جرم HBr}}{\text{جرم محلول}}\times 10^6$$

$$\Rightarrow 1620=\frac{81\times 10^{-3}\,V^2}{1/1\times 10^3\,V}\times 10^6 \Rightarrow V=22\,L$$

دقت کنید بعد از محاسبهٔ $[HBr]$ می‌توان با استفاده از رابطهٔ $(\text{غلظت مولی})=\frac{ppm\times d}{100\times\text{جرم مولی حل‌شونده}}$ به سادگی V را محاسبه نمود:

$$10^{-3}V=\frac{1620\times 1/1}{81\times 1000}\Rightarrow V=22\,L$$

قسمت دوم: با توجه به اطلاعات قسمت قبل مول H^+ اولیه موجود در محلول برابر است با:

$$[H^+]=\frac{n_1(H^+)}{V}\Rightarrow 10^{-3}V=\frac{n_1(H^+)}{V}$$
$$\Rightarrow n_1(H^+)=484\times 10^{-3}\,mol$$

با توجه به pH نهایی محلول داریم:

$$pH_2=2/4\Rightarrow[H^+]=10^{-2/4}=10^{-3}\times 10^{0/6}=4\times 10^{-3}\,mol.L^{-1}$$

$$[H^+]=\frac{n_2(H^+)}{V}\Rightarrow 4\times 10^{-3}=\frac{n_2(H^+)}{22}$$
$$\Rightarrow n_2(H^+)=88\times 10^{-3}\,mol$$

در نتیجه $(396\times 10^{-3}-88\times 10^{-3}=484\times 10^{-3})$ مول اسید باید با $Al(OH)_3$ واکنش دهد. معادلهٔ موازنه شدهٔ واکنش به صورت $3HBr+Al(OH)_3\rightarrow AlBr_3+3H_2O$ است، جرم $Al(OH)_3$ ناخالص موردنیاز برابر است با:

$$?g\,Al(OH)_3\,\text{ناخالص}=396\times 10^{-3}\,mol\,HBr\times\frac{1\,mol\,Al(OH)_3}{3\,mol\,HBr}$$
$$\times\frac{78\,g\,Al(OH)_3}{1\,mol\,Al(OH)_3}\times\frac{100}{66}=15/6\,g$$

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۶، ۳۱ و ۳۲)